Reunião I (TCC): Microgravidade e Magnetofluidodinâmica

February 16, 2016

João Paulo da Silva Alves†, Halan Douglas Almeida Braga‡, Byanca Jaqueline Sousa Amorim‡ e Josué dos Anjos Silva‡

†Instituto Federal do Pará, Belém (IFPA), Departamento de Física; ‡Instituto Federal do Pará, Bragança (IFPA), Departamento de Física

Iniciaremos com uma breve discussão sobre os conceitos de análise vetorial diferencial, dando assim início no estudo sobre fluídos em movimento. Abordaremos um pouco de derivada direcional, gradiente, divergente, finalizando com uma das equações mais importante até aqui: a equação de Euler, expressão análoga a de Newton para Mecânica Clássica.

1 Análise vetorial: Gradiente - Resumo

O campo eletrostático é um exemplo de aplicação de operadores diferenciais vetoriais. Abaixo mostramos sua dependência

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = -\nabla\varphi(\overrightarrow{r}) \tag{1}$$

sendo $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ o vetor posição onde deseja se calcular o campo. Características:

- Nabla ∇ é o operador diferencial vetorial denominado de gradiente;
- Qual a sua interpretação física? Para que ele serve? Quando utilizar? O que é? TAXA DE VARIAÇÃO MÁXIMA DA FUNÇÃO - RESULTADO ESCALAR -> VETOR!
- O valor em coordenadas cartesianas é:

$$\nabla f = \left[\hat{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right], \tag{2}$$

onde $f = f(\overrightarrow{r})$ é uma função escalar, ou se preferir em termos da derivada direcional

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \hat{s} = |\nabla f|\,|\hat{s}|\,cos\alpha,$$

onde $\hat{s}$ é o vêrsor (vetor) de módulo unitário (veja mídias no youtube - João Paulo IFPA). Assumindo inicialmente a derivada orientada no eixo x, o seguinte exemplo $\hat{s} = \hat{i}$,

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \hat{i} = \left[\hat{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right] \cdot \hat{i} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx}, \tag{3}$$

- Pesquisar e estudar sobre: Derivada direcional? O que é produto escalar (interpretação geométrica e analítica)? Operador gradiente em outras coordenadas, por exemplo, esféricas, cilindricas, etc.

2 Análise vetorial: Divergente - Resumo

Podemos ter como exemplo de aplicação do operador diferencial vetorial divergente uma das equações (4), lei de Gauss

$$\nabla \cdot \overrightarrow{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon} \tag{4}$$

Características:

- Nabla $\nabla\cdot$ é o operador diferencial vetorial denominado de divergente;

- Qual a sua interpretação física? Para que ele serve? Quando utilizar? O que é? ELE MEDE O FLUXO DO CAMPO VETORIAL EM QUESTÃO - RESULTADO VETOR -> ESCALAR!
- O valor em coordenadas cartesianas é:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{f} &= \left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right] \cdot \vec{f}, & (5)\\
&= \left[\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right] \cdot (\mathbf{f_x}\hat{\mathbf{i}} + \mathbf{f_y}\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{f_z}\hat{\mathbf{k}}), & (6)\\
&= \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}. & (7)
\end{aligned}$$

onde $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r})$ é uma função vetorial. Casos relevantes para exemplo anterior:

1. Divergente maior do zero: "$\nabla \cdot$" > 0; $\rho > 0$, carga positiva, estamos numa região com volume e área finita onde encontramos uma fonte de cargas, ou seja, saem mais linhas de campo elétrico do que chegam;
2. Divergente maior do zero: "$\nabla \cdot$" < 0; $\rho < 0$, carga negativa, estamos numa região com volume e área finita onde encontramos uma sumidouro (ralo) de cargas, ou seja, entram mais linhas de campo elétrico do que saem;
3. Divergente maior do zero: "$\nabla \cdot$" $= 0$; $\rho = 0$, carga positiva e negativa igual (região neutra), estamos numa região com volume e área finita onde não encontramos nem uma fonte e nem sumidouro de cargas, ou seja, mesma quantidade de linhas de campo elétrico que entram é igual ao que saem.

- Pesquisar e estudar sobre: Divergente? O que é produto escalar (interpretação geométrica e analítica)? Operador divergente em outras coordenadas, por exemplo, esféricas, cilindricas, etc.

3 Introdução a Fluidodinâmica:

- Fluidodinâmica = líquidos + gases em movimento;
- Leis de conservação da natureza: Massa, momento linear e angular;
- Equação de análoga a de Newton para mecânica dos sólidos = Equação de Euler;

Sabemos que da mecânica clássica newtoniana que:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_R &= \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}, & (8)\\
&= \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d(\rho V\vec{v})}{dt} = V\frac{d(\rho\vec{v})}{dt} + (\rho\vec{v})\frac{dV}{dt}, & (9)
\end{aligned}$$

para estudos convencionais como é o caso aqui, $V = constante$, então $\frac{dV}{dt} = 0$, logo:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_R &= V\frac{d(\rho\vec{v})}{dt}, & (10)\\
\frac{\vec{F}_R}{V} &= \frac{d(\rho\vec{v})}{dt}, & (11)\\
\vec{f}_R &= \frac{d\vec{j}}{dt}, & (12)\\
\vec{f}_{externa} + \vec{f}_{interna} &= \frac{d\vec{j}}{dt}, & (13)
\end{aligned}$$

sendo $\vec{f}$ a densidade volumétrica de força e $\vec{j}$ a densidade de velocidade do fluído. A equação acima é chamada de equação de Euler muito utlizada no estudo da fluidodinâmica, observe que esta expressão foi obtida apartir da conservação do momento linear e ela será responsável por entender o comportamento de um fluído em movimento durante sua translação. De acordo com o Moysés Nussenzveig [1] (vol.2, caps. (1) e (2), verificar!) temos que

$$\vec{f}_{externa} = -\nabla P, \qquad (14)$$

onde P é a pressão no fluído devido a uma densidade de força externa. Portanto, a equação de Euler modificada I é dada por:

$$\overrightarrow{f}_{interna} - \nabla P = \frac{d\overrightarrow{j}}{dt}, \tag{15}$$

$$\overrightarrow{f}_{interna} - \nabla P = \frac{d(\rho\overrightarrow{v})}{dt}. \tag{16}$$

1. Caso (a): Fluidostática para fluídos incompressíveis (densidade constante) no eixo z = $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$; $\overrightarrow{f}_{interna} = \nabla P$, sabemos que $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = \rho V\overrightarrow{g}$; $\overrightarrow{f}_{peso} = \rho\overrightarrow{g} = -\rho g\hat{k}$, então:

$$\overrightarrow{f}_{peso} = \nabla P, \tag{17}$$

$$\widehat{i}\frac{\partial P}{\partial x} + \widehat{j}\frac{\partial P}{\partial y} + \widehat{k}\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g\widehat{k}, \tag{18}$$

teremos portanto: $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$, assim

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g, \tag{19}$$

resolvendo a equação diferencial ordinária acima temos: $P(z) = P(z_0) + \rho g(z - z_0)$. Esta é a equação de Stevin (teorema). Olhem!

References

[1] H. Moysés Nussenzveig; Curso de Física Básica vol.2; Editora Edgard Blucher; Edição 2004;

[2] Hwei P. Hsu; Análise Vetorial; Editora LTC; Edição 1972;

[3] João Paulo da S. Alves; Notas de aula na disciplina Física Aplicada I; IFPA 2015.