Reunião II (TCC): Microgravidade e Magnetofluidodinâmica

February 29, 2016

João Paulo da Silva Alves†, Halan Douglas Almeida Braga‡, Byanca Jaqueline Sousa Amorim‡ e Josué dos Anjos Silva‡

†Instituto Federal do Pará, Belém (IFPA), Departamento de Física; ‡Instituto Federal do Pará, Bragança (IFPA), Departamento de Física

Continuaremos com uma breve discussão sobre os conceitos de análise vetorial diferencial, vorticidade, dando assim prosseguimento no estudo sobre fluídos em movimento (rotação+translação). Vamos estudar um pouco mais a equação de Euler e suas outras expressões modificadas dentre elas podemos destacar a equação de Navier-Stokes.

1 Introdução a Fluidodinâmica: Continuação

- Fluidodinâmica = líquidos + gases em movimento;
- Leis de conservação da natureza: Massa, momento linear e angular;
- Equação de análoga a de Newton para mecânica dos sólidos (conservação do momento linear) = Equação de Euler (translação);
- Equação de análoga a de Newton para mecânica dos sólidos (conservação do momento angular) = Equação de Navier-Stokes (rotação);

Sabemos que a equação de Euler (conservação do momento linear) é dada por:

$$\overrightarrow{f}_{externa} + \overrightarrow{f}_{interna} = \frac{d\overrightarrow{j}}{dt}, \tag{1}$$

sendo $\overrightarrow{f}$ a densidade volumétrica de força e $\overrightarrow{j}$ a densidade de velocidade linear do fluído. Esta equação é muito utilizada no estudo da translação de fluídos. Analogamente, podemos ter uma equação idêntica para rotação de fluído, partindo da conservação do momento angular, ou seja:

$$\overrightarrow{\tau}_{resultante} = \frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\overrightarrow{\omega}) = \overrightarrow{\omega}\frac{dI}{dt} + I\frac{d\overrightarrow{\omega}}{dt}, \tag{2}$$

depois de uma certa álgebra (FAZER!) obtemos

$$\overrightarrow{\Im}_{externa} + \overrightarrow{\Im}_{interna} = \frac{d\overrightarrow{\Gamma}}{dt}, \tag{3}$$

onde $\overrightarrow{\Im}$ a densidade volumétrica de torque e $\overrightarrow{\Gamma}$ a densidade de velocidade angular do fluído. Por outro lado, podemos obter a expressão acima por outro caminho partindo da equação (1), vamos agora seguir este caminho.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f} - \nabla P &= \frac{d\overrightarrow{j}}{dt} & (4)\\ &= \frac{d}{dt}(\rho\overrightarrow{v}) = \rho\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} + \overrightarrow{v}\frac{d\rho}{dt}. & (5) \end{aligned}$$

Sabemos que o vetor velocidade $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(x,y,z,t) = \overrightarrow{v}(\overrightarrow{r},t)$, então:

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{v} &= \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial z}dz + \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}dt & (6)\\ &= [(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})\cdot(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z})]\overrightarrow{v} + \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}dt & (7)\\ &= (d\overrightarrow{r}.\nabla)\overrightarrow{v} + \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t}dt. & (8) \end{aligned}$$

Substituindo (8) em (5), temos

$$\begin{aligned} \vec{f} - \nabla P &= \rho \frac{1}{dt}[(d\vec{r}.\nabla)\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt] + \vec{v}\frac{d\rho}{dt} \quad (9) \\ &= \rho[(\vec{v}.\nabla)\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}] + \vec{v}\frac{d\rho}{dt}. \quad (10) \end{aligned}$$

Usando a identidade vetorial: $\nabla(\vec{f}.\vec{g}) = \vec{f} \times (\nabla \times \vec{g}) + \vec{g} \times (\nabla \times \vec{f}) + (\vec{f}.\nabla)\vec{g} + (\vec{g}.\nabla)\vec{f}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{v}.\vec{v}) &= \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{v}.\nabla)\vec{v} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v} \quad (11) \\ \nabla(v^2) &= 2\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + 2(\vec{v}.\nabla)\vec{v} \quad (12) \\ (\vec{v}.\nabla)\vec{v} &= \frac{1}{2}\nabla(v^2) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}). \quad (13) \end{aligned}$$

Portanto, a equação de Euler modificada será

$$\vec{f} - \nabla P = \rho[\frac{1}{2}\nabla(v^2) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}] + \vec{v}\frac{d\rho}{dt}. \quad (14)$$

Vamos encontrar um caso particular da expressão (14) para fluídos incompressíveis, $\rho = constante$ e sobre um campo de força conservativa $\vec{f}/\rho = -\nabla U/m$, sendo U a energia potencial do problema, e também para escoamento uniforme $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$. Logo teremos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m}\nabla U - \frac{1}{\rho}\nabla P - \frac{1}{2}\nabla(v^2) &= -\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (15) \\ -\nabla[\frac{U}{m} + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2}] &= -\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (16) \\ \nabla[\frac{U}{m} + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2}] &= \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}), \quad (17) \end{aligned}$$

por fim aplicando o produto escalar de $\vec{v}$ em toda expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{v}.\{\nabla[\frac{U}{m} + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2}]\} &= \vec{v}.\{\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})\} \quad (18) \\ \vec{v}.\{\nabla[\frac{U}{m} + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2}]\} &= 0 \quad (19) \\ \frac{U}{m} + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} &= constante. \quad (20) \end{aligned}$$

Utilizando os valores conhecidos: $U = mgH$, e sabendo que $\rho = constante$, isso implica que

$$\begin{aligned} \rho\frac{U}{m} + P + \frac{\rho v^2}{2} &= constante \quad (21) \\ P + \rho g H + \frac{\rho v^2}{2} &= constante, \quad (22) \end{aligned}$$

que é a chamada equação de Bernoulli para a fluidodinâmica no caso de escoamento uniforme, fluídos incompressíveis em um campo de forças conservativas (gravitacional). Podemos concluir que, a equação (22) é fruto da conservação do momento linear [1] (Pág. 23).

Vamos obter outra expressão modificada da equação de Euler, neste caso para escoamento com vórtices e circulação para isso definimos a circulação (vorticidade) como sendo

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}. \quad (23)$$

Aplicando esse resultado no teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{v}.d\vec{r} &= \iint_S (\nabla \times \vec{v}).d\vec{S} \quad (24) \\ &= \iint_S \vec{\Omega}.d\vec{S}. \quad (25) \end{aligned}$$

Em paralelo podemos usar novamente, a identidade vetorial: $\nabla \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{\Omega}) = \overrightarrow{v}(\nabla.\overrightarrow{\Omega}) - \overrightarrow{\Omega}(\nabla.\overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{\Omega}.\nabla)\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v}.\nabla)\overrightarrow{\Omega}$, como também $\nabla.\overrightarrow{\Omega} = \nabla.(\nabla \times \overrightarrow{v}) = 0$ (Mostrem!). Voltando a equação (14), tomando o rotacional em ambos os lados, e utilizando que o rotacional de um gradiente é zero (Mostrem!) teremos

$$\begin{aligned}
\nabla \times \{\frac{1}{\rho}(\overrightarrow{f} - \nabla P) - \nabla(\frac{v^2}{2})\} &= \nabla \times \{\frac{\overrightarrow{v}}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} - \overrightarrow{v} \times (\nabla \times \overrightarrow{v})\} & (26)\\
\nabla \times \{\frac{1}{\rho}(\overrightarrow{f} - \nabla P)\} &= \nabla \times \{\frac{\overrightarrow{v}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \overrightarrow{v}) - \nabla \times \{\overrightarrow{v} \times (\nabla \times \overrightarrow{v})\} & (27)\\
\nabla \times \{\frac{1}{\rho}(\overrightarrow{f} - \nabla P)\} &= \nabla \times \{\frac{\overrightarrow{v}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \overrightarrow{v}) - \{\overrightarrow{v}(\nabla.\overrightarrow{\Omega}) - \overrightarrow{\Omega}(\nabla.\overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{\Omega}.\nabla)\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v}.\nabla)\overrightarrow{\Omega}\} & (28)\\
\nabla \times \{\frac{1}{\rho}(\overrightarrow{f} - \nabla P)\} &= \nabla \times \{\frac{\overrightarrow{v}}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\} + \frac{\partial \overrightarrow{\Omega}}{\partial t} + \overrightarrow{\Omega}(\nabla.\overrightarrow{v}) - (\overrightarrow{\Omega}.\nabla)\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v}.\nabla)\overrightarrow{\Omega}, & (29)
\end{aligned}$$

usando $\nabla \times (f\overrightarrow{g}) = (\nabla f) \times \overrightarrow{g} + f(\nabla \times \overrightarrow{g})$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\nabla(\frac{1}{\rho}) \times (\overrightarrow{f} - \nabla P) + \frac{1}{\rho}\nabla \times (\overrightarrow{f} - \nabla P) &= \nabla(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}) \times \overrightarrow{v} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\nabla \times \overrightarrow{v} + \frac{\partial \overrightarrow{\Omega}}{\partial t} + \overrightarrow{\Omega}(\nabla.\overrightarrow{v}) - (\overrightarrow{\Omega}.\nabla)\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v}.\nabla)\overrightarrow{\Omega} & (30)\\
\nabla(\frac{1}{\rho}) \times (\overrightarrow{f} - \nabla P) + \frac{1}{\rho}\nabla \times \overrightarrow{f} &= \nabla(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}) \times \overrightarrow{v} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{\Omega} + \frac{\partial \overrightarrow{\Omega}}{\partial t} + \overrightarrow{\Omega}(\nabla.\overrightarrow{v}) - (\overrightarrow{\Omega}.\nabla)\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v}.\nabla)\overrightarrow{\Omega}, & (31)
\end{aligned}$$

que é conhecida como outra fórmula modificada da equação de Euler que leva em conta a vorticidade do fluído (rotação) e sua dinâmica de translação, ela também é chamada de equação de Navier-Stokes (Façam a aplicação desta expressão (31) a partir da pág. 26 [1]!).

References

[1] H. Moysés Nussenzveig; Curso de Física Básica vol.2; Editora Edgard Blucher; Edição 2004;

[2] Hwei P. Hsu; Análise Vetorial; Editora LTC; Edição 1972;

[3] João Paulo da S. Alves; Notas de aula na disciplina Física Aplicada I; IFPA 2015.