Reunião III (TCC): Microgravidade e Magnetofluidodinâmica

March 16, 2016

João Paulo da Silva Alves†, Halan Douglas Almeida Braga‡, Byanca Jaqueline Sousa Amorim‡ e Josué dos Anjos Silva‡

†Instituto Federal do Pará, Belém (IFPA), Departamento de Física; ‡Instituto Federal do Pará, Bragança (IFPA), Departamento de Física

A força inercial ou pseudoforça de Coriolis é uma pseudoforça ou força inercial - não sendo portanto uma força na definição do termo - percebida apenas por observadores solidários a referenciais não-inerciais animados de movimento de rotação em relação a um referencial inercial que se afastam ou aproximam do centro deste movimento de rotação. A pseudoforça de Coriolis faz-se presente apenas quando o objeto encontrar-se em movimento em relação ao referencial não-inercial em consideração, mostrando-se sempre perpendicular à velocidade e também ao eixo de rotação do sistema não inercial em relação ao inercial.

1 Aplicações da Equação de Euler: Força de Coriolis

É uma força fictícia (pseudoforça) que surge em referenciais acelerados, por exemplo, movimento de queda da estação espacial, dinâmica atmosférica da Terra, etc. Esta força será importante para compreender o papel dela na equação de Euler que é dada por:

$$\overrightarrow{f}_{externa} + \overrightarrow{f}_{interna} = \frac{d\overrightarrow{j}}{dt}, \tag{1}$$

sendo $\overrightarrow{f}$ a densidade volumétrica de força e $\overrightarrow{j}$ a densidade de velocidade linear do fluído. Vamos considerar a Terra como esférica e compreender primeiramente, a aceleração de um sistema no campo gravitacional terrestre e sua rotação.

Em coordenadas esféricas sabemos que:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r} &= r\hat{r}, && (2)\\
\overrightarrow{v} &= \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \hat{r}\frac{dr}{dt} + r\frac{d\hat{r}}{dt}, && (3)\\
\overrightarrow{a} &= \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{dt}\frac{dr}{dt} + \hat{r}\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{r}}{dt} + r\frac{d^2\hat{r}}{dt^2} = 2\frac{d\hat{r}}{dt}\frac{dr}{dt} + \hat{r}\frac{d^2r}{dt^2} + r\frac{d^2\hat{r}}{dt^2}, && (4)
\end{aligned}$$

onde

$$\hat{r} = sin\theta cos\varphi\hat{i} + sin\theta sin\varphi\hat{j} + cos\theta\hat{k}. \tag{5}$$

Por outro lado, precisamos calcular a seguinte expressão (regra da cadeia):

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{r}}{dt} &= \frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\hat{r}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} && (6)\\
&= (cos\theta cos\varphi\hat{i} + cos\theta sin\varphi\hat{j} - sin\theta\hat{k})\dot{\theta} + (-sin\varphi\hat{i} + cos\varphi\hat{j})sin\theta\dot{\varphi}. && (7)
\end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\hat{\varphi} = -sin\varphi\hat{i} + cos\varphi\hat{j}, \tag{8}$$

e fazendo as multiplicações escalar e vetorial abaixo (Fazer!) temos

$$\begin{aligned}
\hat{r}.\hat{\varphi} &= 0, && (9)\\
\hat{r}\times\hat{\varphi} &= -\hat{\theta}, && (10)\\
\hat{\theta}.\hat{\theta} &= 1, && (11)
\end{aligned}$$

com $\hat{\theta} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$. Depois de uma certa álgebra obtemos

$$\hat{\theta} = cos\theta cos\varphi\hat{i} + cos\theta sin\varphi\hat{j} - sin\theta\hat{k}. \tag{12}$$

Portanto, voltando para a equação (7) substituindo os valores dos vêrsores $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ chegaremos a

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\theta} + sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}. \tag{13}$$

Além da primeira derivada temos que saber também a segunda derivada no tempo da expressão acima, logo

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\hat{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\{\dot{\theta}\hat{\theta} + sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}\} = \ddot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} + cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + sin\theta\ddot{\varphi}\hat{\varphi} + sin\theta\dot{\varphi}\frac{d\hat{\varphi}}{dt} && (14)\\
&= \ddot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\theta}(\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\hat{\theta}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}) + cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + sin\theta\ddot{\varphi}\hat{\varphi} + sin\theta\dot{\varphi}(\frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}) && (15)\\
&= \ddot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\theta}(\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} + \frac{d\hat{\theta}}{d\varphi}\dot{\varphi}) + cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + sin\theta\ddot{\varphi}\hat{\varphi} + sin\theta\dot{\varphi}(\frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi}\dot{\varphi}) && (16)\\
&= \ddot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\theta}(-\hat{r}\dot{\theta} + cos\theta\hat{\varphi}\dot{\varphi}) + cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + sin\theta\ddot{\varphi}\hat{\varphi} + sin\theta\dot{\varphi}(-\hat{\rho}\dot{\varphi}) && (17)\\
&= -\dot{\theta}\dot{\theta}\hat{r} + \ddot{\theta}\hat{\theta} + cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + sin\theta\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - sin\theta\dot{\varphi}\dot{\varphi}\hat{\rho} && (18)\\
&= -\dot{\theta}^2\hat{r} + \ddot{\theta}\hat{\theta} + 2cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + sin\theta\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - sin\theta\dot{\varphi}^2\hat{\rho}. && (19)
\end{aligned}$$

Assim, a aceleração considerando a Terra um elipsóide será:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} &= 2\{\dot{\theta}\hat{\theta} + sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}\}\dot{r} + \ddot{r}\hat{r} + r(-\dot{\theta}^2\hat{r} + \ddot{\theta}\hat{\theta} + 2cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + sin\theta\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - sin\theta\dot{\varphi}^2\hat{\rho}) && (20)\\
&= \ddot{r}\hat{r} - r\dot{\theta}^2\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + 2sin\theta\dot{r}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + 2rcos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + rsin\theta\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - rsin\theta\dot{\varphi}^2\hat{\rho} && (21)\\
&= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + (2sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2rcos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + rsin\theta\ddot{\varphi})\hat{\varphi} - rsin\theta\dot{\varphi}^2\hat{\rho}, && (22)
\end{aligned}$$

enquanto que, a sua velocidade é dada por:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= \dot{r}\hat{r} + r(\dot{\theta}\hat{\theta} + sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}), && (23)\\
&= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + rsin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}. && (24)
\end{aligned}$$

Calculando um caso particular da velocidade e aceleração conhecidas para o MCU (Movimento Circular e Uniforme), $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$,$\ddot{\theta} = \alpha$, $\dot{\varphi} = 0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}_{MCU} &= \omega r\hat{\theta}, && (25)\\
\overrightarrow{a}_{MCU} &= -\omega^2 r\hat{r} + \alpha r\hat{\theta}. && (26)
\end{aligned}$$

References

[1] H. Moysés Nussenzveig; Curso de Física Básica vol.1; Editora Edgard Blucher; Edição 2004;

[2] João Paulo da S. Alves; Notas do minicurso sobre Efeitos não-inerciais devido a rotação da Terra; IFPA 2015.