

I Workshop de Física Teórica e Instrumental

Minicurso: Campo eletrostático de placas e folhas delgadas em cantos e arestas

João Paulo da Silva Alves^{1,2}

(1) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará, 66093-020, Belém, PA, Brasil

(2) - Faculdade de Física, Universidade Federal do Pará, 66075-110, Belém, PA, Brasil

(Dated: October 30, 2013)

Em muitas situações práticas, as superfícies condutoras se acoplam de forma que podem ser aproximadas, pelo menos em pequena escala, pela interseção de dois planos [1]. É útil, portanto, ter uma visão sobre como encontrar e entender o comportamento do potencial eletrostático, dos campos e das densidades de carga nas vizinhanças destes “cantos” agudos ou arestas. Vamos encontrar estas grandezas físicas mensuráveis para regiões próximas da origem, tanto no vácuo quanto na presença de um meio dentro de um material com susceptibilidade elétrica χ no espaço bidimensional. Além disso, iremos assumir que o potencial é constante na superfície do material e que estamos em um regime de equilíbrio eletrostático. Deixaremos de fora deste trabalho, o tratamento para longas distâncias das medidas físicas discutidas até então [2]. Para finalizar, falaremos também do caso tridimensional deste problema, como uma extensão para tratar casos muito mais realísticos encontrados na natureza [2].

I. INTRODUÇÃO: EQUAÇÃO DE MAXWELL, POISSON E LAPLACE

Partindo da equação local de Maxwell (*lei de Gauss*) no vácuo:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}, \quad (1)$$

onde ∇ é o operador diferencial vetorial dado por $\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$ (em coordenadas cartesianas) e ε_0 a permissividade elétrica do vácuo, o campo eletrostático $\vec{E}(\vec{r})$ fora da fonte, densidade de carga $\rho(r) = 0$, é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad (2)$$

logo, podemos escrever a seguinte equação:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \Phi(\vec{r}), \quad (3)$$

sendo $\Phi(\vec{r})$ o potencial eletrostático.

Substituindo a expressão (3) em (1) obtemos as equações de Poisson e Laplace, respectivamente:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}, \quad (4)$$

e

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 0, \quad (5)$$

onde $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta$ (operador diferencial - Laplaciano). Vamos obter na próxima seção a equação de Laplace em coordenadas polares.

II. EQUAÇÃO DE LAPLACE EM COORDENADAS POLARES

É de fundamental importância, adaptar as equações utilizadas com a geometria (simetria) do nosso problema

para evitar dificuldades extras e compreensões físicas incompletas e errôneas. Pensando nisso, a equação (5) deve ser explorada em outras coordenadas (polares) já que nosso problema tem simetria planar (*placas e folhas delgadas*). Iremos neste momento, fazer a seguinte transformação de coordenadas $(x, y) \implies (r, \theta)$:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \Phi(x, y) \implies \Phi(r, \theta), \\ \nabla^2 &= \nabla^2(x, y) \implies \nabla^2(r, \theta), \end{aligned} \quad (6)$$

onde $\nabla^2(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Já sabemos que,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned} \quad (7)$$

com $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\tan \theta = \frac{y}{x} \implies \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, logo aplicando a regra da cadeia nas derivadas parciais do laplaciano temos para x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (8)$$

e de maneira análoga para y temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (9)$$

logo, o gradiente será:

$$\begin{aligned} \nabla &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}, \\ &= \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (10)$$

onde usamos as transformações para vetores unitários (*versor*):

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta; & \hat{\theta} &= -\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta, \\ \hat{i} &= \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta; & \hat{j} &= \hat{r} \sin \theta + \hat{\theta} \cos \theta. \end{aligned} \quad (11)$$

O laplaciano ∇^2 pode ser encontrado através do seguinte produto escalar:

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \nabla \cdot \nabla, \\ &= \left[\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} \right] \cdot \left[\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} \right], \\ &= \left[\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \cdot \left[\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right], \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},\end{aligned}\quad (12)$$

com a utilização das equações (10) e (11). Portanto, a equação de Laplace para o potencial eletrostático (5) e (6) assumirá a forma:

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \theta)}{\partial \theta^2} = 0. \quad (13)$$

Vamos agora aplicar algum método de resolução na equação de Laplace (13).

III. MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

Para resolvermos a expressão (13) via método de separação de variáveis é preciso fazer a seguinte substituição:

$$\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta), \quad (14)$$

onde $R(r)$ e $\Theta(\theta)$ são duas funções independentes de uma única variável. Substituindo (14) em (13) temos:

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dR(r)}{dr} \right] = -\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2}. \quad (15)$$

A igual acima só será verdadeira quando a solução das equações diferenciais ordinárias do lado direito e esquerdo de (15) forem iguais a uma constante positiva (*solução periódica em θ* , $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$), então:

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dR(r)}{dr} \right] = -\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} \equiv \nu^2. \quad (16)$$

Isto implica que:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \nu^2 \Theta(\theta) &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left[r \frac{dR(r)}{dr} \right] - \nu^2 \frac{R(r)}{r} &= 0,\end{aligned}\quad (17)$$

cujas soluções podem ser obtidas pelos métodos tradicionais de resolução de equação diferencial ordinária (*transformadas de Laplace, Fourier, função de Green, etc.*), ou via ansatz, $\Theta(\theta) = ae^{\alpha\theta}$ e $R(r) = br^\beta$ que chegaremos a:

$$\begin{aligned}\Theta(\theta) &= A \cos(\nu\theta) + B \sin(\nu\theta), \\ R(r) &= ar^{-\nu} + br^\nu,\end{aligned}\quad (18)$$

onde A , a , B , b são constantes a determinar pelas condições iniciais ou de contorno. Assim, a solução para $\Phi(r, \theta)$ utilizando (14) e (18) será:

$$\Phi(r, \theta) = (ar^{-\nu} + br^\nu) [A \cos(\nu\theta) + B \sin(\nu\theta)]. \quad (19)$$

Aplicando a condição de contorno periódica, $\Phi(r, \theta) = \Phi(r, \theta + 2\pi)$, em (19) obtemos $\nu \in Z$.

Resolvendo as equações diferenciais (17) para um caso particular $\nu = 0$, temos o potencial $\Phi_{\nu=0}(r, \theta)$:

$$\Phi_{\nu=0}(r, \theta) = (a_0 \ln r + b_0)[A_0 + B_0\theta]. \quad (20)$$

Podemos aplicar o princípio da superposição das soluções das equações diferenciais, e concluir que $\Phi(r, \theta)$ é dado por:

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} (a_m r^{-m\nu} + b_m r^{m\nu}) \\ &\times [A_m \cos(m\nu\theta) + B_m \sin(m\nu\theta)],\end{aligned}\quad (21)$$

$$\begin{aligned}&= (a_0 \ln r + b_0)[A_0 + B_0\theta] + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m r^{-m\nu} + b_m r^{m\nu}) \\ &\times [A_m \cos(m\nu\theta) + B_m \sin(m\nu\theta)],\end{aligned}\quad (22)$$

$$\begin{aligned}&= c_0 + d_0\theta + e_0 \ln(r) + f_0 \ln(r)\theta \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} r^{m\nu} \{C_m \cos(m\nu\theta) + D_m \sin(m\nu\theta)\} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{r^{m\nu}} \{E_m \cos(m\nu\theta) + F_m \sin(m\nu\theta)\}.\end{aligned}\quad (23)$$

Esta é a solução geral do problema (*sem condição de contorno*) para o potencial eletrostático em coordenadas planares.

IV. SOLUÇÃO DO POTENCIAL ELETROSTÁTICO COM CONDIÇÃO INICIAL PRÓXIMO DA ORIGEM

Vamos aplicar as condições iniciais em (23). Iniciaremos com:

A. Soluções finitas próximas da origem

Condição inicial:

$$\Phi(r = 0, \theta) = \textit{finito} \implies e_0 = f_0 = E_m = F_m = 0, \quad (24)$$

com isso, a solução para o potencial eletrostático (23) torna-se:

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta) &= c_0 + d_0\theta + \sum_{m=1}^{\infty} r^{m\nu} \{C_m \cos(m\nu\theta) \\ &+ D_m \sin(m\nu\theta)\}.\end{aligned}\quad (25)$$

B. Potencial constante

Condição inicial:

$$\Phi(r, \theta = 0) = V \implies C_m = 0, c_0 = V, \quad (26)$$

logo:

$$\Phi(r, \theta) = V + d_0\theta + \sum_{m=1}^{\infty} D_m r^{m\nu} \sin(m\nu\theta). \quad (27)$$

C. Superfície equipotencial

Condição inicial:

$$\Phi(r, \theta = 0) = \Phi(r, \theta = \beta) \implies d_0 = 0, \nu = l\pi/\beta, \quad (28)$$

com $l \in \mathbb{Z}_+^*$. Portanto,

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= V + \sum_{m=1}^{\infty} D_m r^{m\nu} \sin(m\nu\theta), \\ &= V + \sum_{m=1}^{\infty} D_m r^{\frac{m\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{m\pi\theta}{\beta}\right). \end{aligned} \quad (29)$$

Esta é a solução para o potencial eletrostático em regiões próximas da origem do nosso problema. A série (29) é convergente para esta região, e podemos no primeiro momento trabalhar com apenas o primeiro termo desta série, então:

$$\Phi(r, \theta)_{prox} \approx V + D_1 r^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right). \quad (30)$$

A constante D_1 é calculada utilizando a última condição inicial, que é o valor do potencial eletrostático a uma certa distância r da origem do nosso problema, lembre-se: $\Phi(r) = \frac{Q_{fonte}}{4\pi\epsilon_0 r}$, assim

D. Referencial do potencial eletrostático

Condição inicial:

$$\Phi(r = d, \theta = \theta_0) = \varphi_0 \implies d_0 = 0, D_1 = \left[\frac{\varphi_0 - V}{\sin\left(\frac{\pi\theta_0}{\beta}\right)} \right] d^{-\frac{\pi}{\beta}},$$

desta forma:

$$\Phi(r, \theta)_{prox} \approx V + \left[\frac{\varphi_0 - V}{\sin\left(\frac{\pi\theta_0}{\beta}\right)} \right] d^{-\frac{\pi}{\beta}} r^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right) \quad (32)$$

que é a equação para o potencial eletrostático genérica próximo da origem aplicada às condições iniciais do nosso problema.

V. CAMPO ELETROSTÁTICO

Utilizando as equações (2) e (10) temos:

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \theta)_{prox} &= -\nabla\Phi(r, \theta)_{prox}, \\ &= -\left[\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \Phi(r, \theta)_{prox}, \end{aligned} \quad (33)$$

comparando esta expressão com as partes radial e tangencial do campo, $\vec{E}(r, \theta)_{prox} = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}$, obtemos:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\Phi(r, \theta)_{prox}}{\partial r}, \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi(r, \theta)_{prox}}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (34)$$

Substituindo a expressão (32) em (34) e trocando a notação $(r, \theta) \implies (r, \theta, \beta)$, temos

$$\begin{aligned} E_r(r, \theta, \beta) &= -\left[\frac{(\varphi_0 - V)\pi d^{-\pi/\beta}}{\beta \sin\left(\frac{\pi\theta_0}{\beta}\right)} \right] r^{\frac{\pi}{\beta}-1} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right), \\ E_\theta(r, \theta, \beta) &= -\left[\frac{(\varphi_0 - V)\pi d^{-\pi/\beta}}{\beta \sin\left(\frac{\pi\theta_0}{\beta}\right)} \right] r^{\frac{\pi}{\beta}-1} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right), \end{aligned} \quad (35)$$

onde estas são as componentes do campo eletrostático próximo da origem $\vec{E}(r, \theta)_{prox}$.

VI. DENSIDADE DE CARGA SUPERFICIAL NO VÁCUO

Partindo da primeira equação de Maxwell na forma integral

$$\oint_C \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}, \quad (36)$$

e usando que a densidade de carga σ é dada por: $\sigma = Q/S$, temos

$$\begin{aligned} \sigma &= \epsilon_0 E_{normal}, \\ &= \epsilon_0 E_\theta. \end{aligned} \quad (37)$$

(31) Substituindo (35) em (37) chegamos a

$$\sigma(r, \theta, \beta) = -\left[\frac{(\varphi_0 - V)\pi\epsilon_0 d^{-\pi/\beta}}{\beta \sin\left(\frac{\pi\theta_0}{\beta}\right)} \right] r^{\frac{\pi}{\beta}-1} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right). \quad (38)$$

Um caso particular importante para a densidade superficial de carga no vácuo (38) é: $\sigma(r, \theta = 0, \beta) = -\sigma(r, \theta = \beta, \beta)$ (*processo de eletrização por indução*).

VII. DENSIDADE DE CARGA SUPERFICIAL EM UM MEIO

Substituindo permissividade elétrica do vácuo ε_0 pela permissividade elétrica do meio ε e susceptibilidade elétrica do material χ temos:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{1 + \chi}. \quad (39)$$

A permissividade é determinada pela habilidade de um material de se polarizar em resposta a um campo elétrico aplicado e, dessa forma, cancelar parcialmente o campo dentro do material. Está diretamente relacionado com

a susceptibilidade elétrica. Já a susceptibilidade elétrica de um material dielétrico é a medida de quão facilmente ele se polariza em resposta a um campo elétrico, $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Logo, a densidade de carga superficial elétrica em um meio de permissividade elétrica ε e susceptibilidade elétrica do material χ é:

$$\sigma(r, \theta, \beta) = - \left[\frac{(\varphi_0 - V) \pi \varepsilon d^{-\pi/\beta}}{(1 + \chi) \beta \sin\left(\frac{\pi\theta_0}{\beta}\right)} \right] r^{\frac{\pi}{\beta}-1} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\beta}\right). \quad (40)$$

OBS: FALTA CONCLUIR!

-
- [1] John David Jackson, Eletrodinâmica clássica, 3ª Edição, Editora John Wiley, 1999.
 [2] João Paulo da Silva Alves, Notas de pesquisa

eletrodinâmica clássica e quântica molecular, 2013.